Aufgaben: Abstand & Vektorprodukt

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Abstand der zu einander parallelen Geraden g und h in der Ebene.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ ($t_1, t_2 \in$ IR)

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine Ebene mit 3x+6y-2z=14. Bestimmen Sie die Abstände der Punkte A(-2|9|3), B(1|2|4), C(2|3|5) und D(0|0|0) von der Ebene.

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine Ebene mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ (r,s∈ IR). Bestimmen Sie die Abstände der Punkte U(1|3|5) und V(-2|3|5) von der Ebene.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Ebene ε mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (r,s∈ IR) und ein Punkt P(12|9|-4).

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die P enthält und zur Ebene ε parallel ist. Ermitteln Sie zudem den Abstand der Ebenen zueinander.

Aufgabe 5:

5.1) Gegeben sind die Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($t_1, t_2, t_3 \in$ IR) und die Ebene ε mit x-3y+z+2=0. Bestimmen Sie vorhandene Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene.

5.2) Gegeben sind die Ebene ε mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (r,s∈ IR) und die (nachfolgend aufgeführten) Geraden g und h. Bestimmen Sie (falls gegeben) den Schnittpunkt der jeweiligen Gerade mit der Ebene.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ($t_1 \in$ IR) **b)** h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; ($t_2 \in$ IR)

Aufgabe 6:

a) Gegeben ist eine Ebene ε mit 4x+2y+3z=6. Bestimmen Sie die drei Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen.

b) Gegeben ist eine Ebene ε mit x+y+z=1, dazu der Punkt P(0|5|2).
Bestimmen Sie den Abstand von P zu ε, dazu die Gerade, die durch P verläuft und senkrecht auf ε steht. Wie lautet der Schnittpunkt der Geraden mit ε?

Aufgabe 7:

Berechnen Sie das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

8.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmten Parallelogramms.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

8.2 Berechnen Sie vektoriell den Flächeninhalt des Dreieckes im Raum, das durch folgende Punkte gegeben ist: X(2|3|1); Y(1|1|1) Z(3|2|2)

Aufgabe 9:

a) Berechnen Sie das Volumen des Spats, das durch die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ .Bestimmen Sie $t \in$ IR so, dass das Spatprodukt Null ist.

Aufgabe 10:

a) Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Länge des Vektors $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$.

b) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, das durch die Vektoren $\vec{x}$; $\vec{y}$ und $\vec{z}$ gegeben ist.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Geben sie den Flächeninhalt des Parallelogramms an, das von den beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$