

Aufgaben zum Thema Kreis & Kugel

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Kugeln k_1 : $M_1(-3|2|2)$ mit $r_1=5$ und k_2 : $M(-4|5|1)$ mit $r_2=2 \cdot \sqrt{2}$

- a) Zeigen Sie, dass sich die Kugeln in einem Schnittkreis schneiden.
- b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ε , in der der Schnittkreis liegt.
- c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises (Rundung: 2. NKS).

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Punkte $A(-4|2)$; $B(8|-6)$ und $C(4|6)$, die einen Kreis k festlegen. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius von k , ohne die Kreisgleichung in Koordinatenform oder vektorieller Form zu verwenden, sondern nur unter Verwendung von Geraden und Mittelsenkrechten. Fertigen Sie zuerst eine Skizze an!

Aufgabe 3:

Gegeben seien eine Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) und ein Kreis k mit

$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 49$. Die Gerade g ist eine Sekante des Kreises k , sie zerlegt die Kreisscheibe in zwei Teilflächen. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der beiden Teilflächen (Rundung: 2. NKS oder besser: Brüche/Wurzelterme beibehalten!)

Aufgabe 4:

Gegeben seien eine Kugel k mit Mittelpunkt $M(4|4|3)$ und dem Radius $r=7$ LE und eine Ebene ε

mit $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($r; s \in \mathbb{R}$)

- a) Zeigen Sie, dass ε die Kugel k schneidet und nicht nur tangiert. Berechnen Sie den Mittelpunkt M_s und den Radius r_s des Schnittkreises k_s .
- b) Die Kugel k wird an der Ebene ε gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung und die vektorielle Gleichung der gespiegelten Kugel k^* .
- c) Bestimmen Sie den Punkt $P(6|1|z)$ mit $z \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass P auf der Kugel k liegt.
- d) T sei die Tangentialebene T an k im Punkt P (aus Aufg. c). Bestimmen Sie alle zu T parallelen Ebenen, die die Kugel schneiden. Geben Sie die Koordinatengleichung der Ebenen an, in denen der Schnittkreis den Radius $r_s=2$ LE besitzt.

Aufgabe 5: (Bearbeitungszeit: Rechnen Sie mindestens 90 Minuten ein)

Gegeben seien die Ebene ε mit $3y-3z-3=0$, die Geradenschar $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($k, r \in \mathbb{R}$)

sowie die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$). Weiter seien Kugeln k_1 und k_2 gegeben, deren

Mittelpunkte auf der Geraden h liegen, deren Radien jeweils $r=5 \cdot \sqrt{2}$ betragen und für die ε eine Tangentialebene ist.

- Zeigen Sie: Alle Geraden aus g_k sind zueinander parallel und liegen in der Ebene ε .
- Überprüfen Sie, ob Geraden aus g_k die Gerade h schneiden und bestimmen Sie ggf. Schnittpunkte.
- Die Gerade h durchsticht die Ebene ε . Bestimmen Sie den Winkel zwischen ε und h .
- Bestimmen Sie die beiden Mittelpunkte M_1 und M_2 von k_1 bzw. k_2 . Fertigen Sie zuerst eine aussagekräftige Skizze an. [Kontrolle: $M_1(2|5|-6)$]
- Zeigen Sie, dass sich die Kugeln k_1 und k_2 nicht schneiden oder berühren und geben Sie den minimalsten Abstand zwischen den Kugeln an.
- Die Ebene ε wird am Punkt $M_1(2|5|-6)$ gespiegelt. Geben Sie die Gleichung der gespiegelten Ebene ε^* in Hessescher Normalenform und in Koordinatengleichung an.
- Zeigen Sie, dass sich die Punkte $A(-1|0|-2)$ und $C(-1|1|-1)$ auf der Kugel k_1 befinden und bestimmen Sie einen Punkt B so, dass die Strecke AB einen Durchmesser von k_1 darstellt.
- Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche von Dreieckspyramide mit der Spitze D , wobei D auf k_1 liegt. Alle Punkte D_i von D , für die die Pyramide $ABCD_i$ das Volumen 11 VE aufweist, bilden zwei Kreise auf der Kugeloberfläche (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Höhe h dieser Pyramiden $ABCD_i$ und danach die beiden Radien der oben genannten Kreise auf der Kugeloberfläche von k_1 . Bestimmen Sie zusätzlich die beiden Mittelpunkte dieser Kreise. Fertigen Sie jeweils aussagekräftige Skizzen an!