Aufgaben: Skalarprodukt

Aufgabe 1:
Berechnen Sie zu den gegebenen Vektoren das Skalarprodukt.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$; c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-8\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$; d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}15\\22\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-8\end{pmatrix}$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie den jeweiligen Winkel, der von den Vektoren eingeschlossen wird.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und überlegen Sie anschließend, wie das Ergebnis auch ohne Berechnung des Skalarproduktes hätte ermittelt werden können.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}$

Aufgabe 4:
Gegeben sind die Punkte A(–2|3|1) und B(–1|1|–2) bzw. X(1|–2–|–4) und Y(–3|3|–1).
Bestimmen Sie den Winkel zwischen den zugehörigen Ortsvektoren von A und B bzw. X und Y.

Aufgabe 5:
Berechnen Sie die Weite der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC, das durch folgende Punkte im Raum gegeben ist: A(4|–1|–2), B(0|3|5), C(4|–1|3)

Aufgabe 6:
Geben Sie zum Vektor $\vec{n}$ einen parallelen Vektor mit der Länge 1 an.

a) $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ b) $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\12\\12\end{pmatrix}$

Aufgabe 7:
Zeigen Sie unter Verwendung eines Skalarproduktes, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
A(3|–2|12); B(7|0|11); C(6|–7|14)

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Geben Sie alle Vektoren an, die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal sind.

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie zu den gegebenen Ebenen die zugehörige Koordinatengleichung der Ebene.

a) ε: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (r,s∈ IR)

b) Ebene ε, die durch die Punkte A(–1|3|–4), B(2|–5|3) und C(1|–3|–2) im Raum eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 10:

Zeigen Sie, dass die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (t∈ IR) die Ebene ε mit der Koordinatengleichung 3x–2y+2z–4=0 nicht senkrecht schneidet.

Aufgabe 11:

Gegeben ist die Ebene ε in Normalenform: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Geben Sie die Ebenengleichung in Koordinatenform an, zeigen Sie, dass es sich bei der NF nicht um die Hessesche NF handelt und geben Sie die zugehörige HNF an.

Aufg. 12: Zum intensiven Nachdenken!

In einer Kugel mit dem Radius 1 ist ein Würfel einbeschrieben. („enthalten“, „von der Kugel vollständig umschlossen mit größtem Volumen“). Geben Sie die Kantenlänge des Würfels an.

(Die Antwort 1 LE ist selbstverständlich falsch!)