Lösungen zum Thema Kreis&Kugel

Lösung Aufg. 1:
k: $(x+4)^2+(y-5)^2=25$, $B \in k$, A liegt im Inneren des Kreises (auf der Kreisscheibe), C liegt außerhalb der Kreisscheibe.

Lösung Aufg. 2:
$M(-1|1)$, $r=10$; $(x+1)^2+(y-1)^2=100$
Tipp: Koordinaten der Punkte in die allg. Kreisgleichung einsetzen, das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen auflösen.

Lösung Aufg. 3:
a) Umformung zu $(x+1)^2+(y+1)^2=1$
$\Rightarrow$ Gleichung beschreibt den Kreis mit $M(-1|-1)$ und $r=1$.
b) Umformung zu $(x+2)^2+(y+1)^2=-1$
$\Rightarrow$ Gleichung beschreibt keinen Kreis.

Lösung Aufg. 4:
Tipp: Schneidet der Kreis die x-Achse, ist die y-Koordinate y=0!
$S_{x1}(-0{,}46|0)$ und $S_{x2}(6{,}46|0)$ (gerundet)
$S_{y1}(0|0{,}65)$ und $S_{y2}(0|-4{,}65)$ (gerundet)

Lösung Aufg. 5:
a) $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1{,}2\\-0{,}3\\0{,}1\end{pmatrix}\right]^2=0{,}0625$ $(x-1{,}2)^2+(y+0{,}3)^2+(z-0{,}1)^2=0{,}0625$

b) $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\right]^2=4$ $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=4$

Lösung Aufg. 6:
a) g tangiert k im Berührpunkt $B(\tfrac{4}{5}|-\tfrac{24}{15})$.
b) g und k schneiden sich nicht.

Lösung Aufg. 7:
t_1: $y=-0{,}75x+7$ t_2: $y=1\tfrac{1}{3}x+7$

Lösung Aufg. 8:
a) Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten $S_1(0|0)$ und $S_2(-1|1)$.
b) Die Kreise schneiden sich nicht.
Gleichsetzung oder Kontrolle über Abstand der Mittelpunkte und Summe der Radien!

Lösung Aufg. 9:
Der Abstand des Mittelpunktes von der x-Achse in Richtung y-Achse beträgt 3 , der Abstand des Mittelpunktes von der x-Achse in Richtung z-Achse beträgt 4 .
Also gilt: $r^2=3^2+4^2$ (Skizze anfertigen), somit muss der Radius r=5 betragen.

Lösung Aufg. 10:
a) $S_1(-2|2|1)$; $S_2(2|1|2)$

b) Tangentialebene an S_1 ε_1: $-2x+2y+z-9=0$ Tangentialebene an S_2 ε_2: $2x+y+2z-9=0$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor von g, $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor auf ε_1 (aus Ebenengleichung ablesen!).
Für den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{n}$ gilt:
$\vec{a}\circ\vec{n}=|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\alpha)$ (Skalarprodukt) also: $\cos(\alpha)=\frac{\vec{a}\circ\vec{n}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}\approx-0{,}707 \Rightarrow \alpha\approx 135°$

also ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{n}$ $135°-90°=45°$ (Tipp: Skizze anfertigen)

Lösung Aufg. 11:
a) Die Kugeln schneiden sich nicht.

b) Die Kugeln berühren sich (in genau einem Punkt).

c) Die Kugeln schneiden sich, der Radius des Schnittkreises beträgt $x=\frac{1}{14}\sqrt{595}\approx 1{,}74$
Tipp: Gleichungssystem $4^2=x^2+(\sqrt{21}-|\overrightarrow{M_S M_2}|)^2$ und $2^2=|\overrightarrow{M_S M_2}|^2+x^2$, wobei M_s der Mittelpunkt des Schnittkreises ist und x der Radius.

Lösung Aufg. 12:
Abstand von M zur Ebene ε: $\left|\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c2}}\right|=\left|\frac{1\cdot(-8)+4\cdot\bar{(}3)+1\cdot 0+2}{\sqrt{1^2+4^2+1^2}}\right|\ \frac{18}{\sqrt{18}}=\sqrt{18}\approx 4{,}24$
Da aber $r=\sqrt{72}>\sqrt{18}$, muss die Kugel die Ebene schneiden.
Radiusbestimmung: $r^2=(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{72})^2+x^2$ (Skizze!!), also $x\approx 7{,}35$.
Der Radius des Schnittkreises beträgt rund 7,35 (LE).

Lösung Aufg. 13:
Wir denken uns einen Einheitsnormalenvektor $\overrightarrow{e_n}$ auf ε. Da dieser orthogonal zur Ebene ist und die Ebene orthogonal zum Vektor $\overrightarrow{MB}$ (B sei der Berührpunkt), ist $\overrightarrow{e_n}$ parallel zu $\overrightarrow{MB}$ (Skizze zum Verständnis anfertigen!).
Dann gilt: $\overrightarrow{MB}=\sqrt{14}\cdot\overrightarrow{e_n}$ (wenn die Orientierung von $\overrightarrow{e_n}$ entsprechend gewählt ist).
$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ lässt sich aus der Ebenengleichung herleiten, also $\overrightarrow{e_n}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$, da $|\vec{n}|=\sqrt{14}$.

Weiter: $\vec{b}-\vec{m}=\sqrt{14}\cdot\overrightarrow{e_n} \quad\Rightarrow\quad \vec{b}=\sqrt{14}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$

Der Berührpunkt lautet B(5|1|4).

Lösung Aufg. 14:

a) k_1: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\right]^2=9^2$ $\qquad$ k_1: $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9^2$

b) $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=r_1+r_2=9+r_2$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\left|\vec{m_2}-\vec{m_1}\right|=\sqrt{1296}=36$ $\Rightarrow r_2=36-9=27$

k_2: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-12\\30\\-1\end{pmatrix}\right]^2=27^2$

c) Berührpunkt B bestimmen:

Skizze: 

$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot k=\overrightarrow{M_1B}$, das heißt, der Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ ist ein („verkürztes“) Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{M_1B}$, der “Stauchfaktor” ist k und für k muss gelten: $0<k<1$.

Berechnung von x: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=r_1+r_2$ und $\left|\overrightarrow{M_1B}\right|=r_1$ $\Rightarrow k=\frac{r_1}{r_1+r_2}=\frac{9}{9+27}=0{,}25$

$\vec{b}=\vec{m_1}+\overrightarrow{M_1B}=\vec{m_1}+k\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+0{,}25\cdot\begin{pmatrix}-16\\32\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\8\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ B(0|6|2)

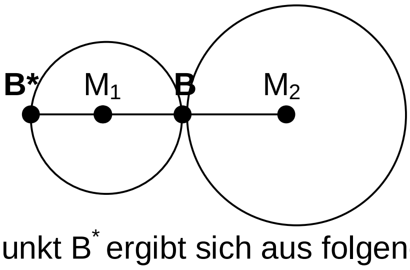
d) Koordinaten von B eingesetzt in die allg. Tangentialgleichung:

$(x-4)(0-4)+(y+2)(6+2)+(z-3)(2-3)=81$

$\Rightarrow t_1$: $-4x+8y-z-46=0$ und $t_1=t_2$ Die beiden Tangentialebenen sind natürlich identisch!

(lässt sich aber auch ohne nachzudenken für k_2 ausrechnen)

e) Die Skizze verdeutlicht, dass es nur eine Tangentialebene sein kann an dem Berührpunkt B^* (da die Ebenen parallel sein müssen und die Kugel k_1 nur berühren dürfen!).



Berührpunkt B^* ergibt sich aus folgender Gleichung: $\overrightarrow{BB^*}=2\cdot\overrightarrow{BM_1}$ $\Rightarrow$ $\vec{b^*}-\vec{b}=2\cdot\vec{m_1}-2\cdot\vec{b}$ $\Rightarrow$

$\vec{b^*}=2\cdot\vec{m_1}-\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\-10\\4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ B*(8|–10|4)

B* in die allg. Tangentengleichung eingesetzt: $(x-4)(8-4)+(y+2)(-10+2)+(z-3)(4-3)=81$

$\Rightarrow$ t_{b^*}: $4x-8y+z-116=0$