Lösungen zum Thema Kreis & Kugel

Lösungen zur Aufg. 1:

a) $r_1 = 5$; $r_2 = \sqrt{8}$ ($\approx 2{,}83$) ; $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{m_2} - \overrightarrow{m_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{11}$

Dann gilt: $r_1+r_2 = 5+\sqrt{8} > \sqrt{11} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ und weiter: $|r_1-r_2|=|5-\sqrt{8}|\approx 2{,}17 < \sqrt{11} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$

Aus $|r_1-r_2| < \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1+r_2$ folgt: Die Kugeln k_1 und k_2 schneiden sich, da $r_1+r_2 \neq \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$, berühren sich die Kugeln nicht.

b)

k_1: $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 25$
$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-4y+4+z^2-4z+4 = 25$
$\Leftrightarrow x^2+6x+y^2-4y+z^2-4z = 8$

k_2: $(x+4)^2+(y-5)^2+(z-1)^2 = 4\cdot 2=8$
$x^2+8x+16+y^2-10y+25+z^2-2z+1 = 8$
$x^2+8x+y^2-10y+z^2-2z = -34$

(Subtraktion k_1-k_2)

$$\begin{array}{l} x^2+6x+y^2-4y+z^2-4z = 8 \\ -\ \underline{(x^2+8x+y^2-10y+z^2-2z = -34)} \\ -2x\ +\ 6y\ \ -2z = 42 \end{array}$$

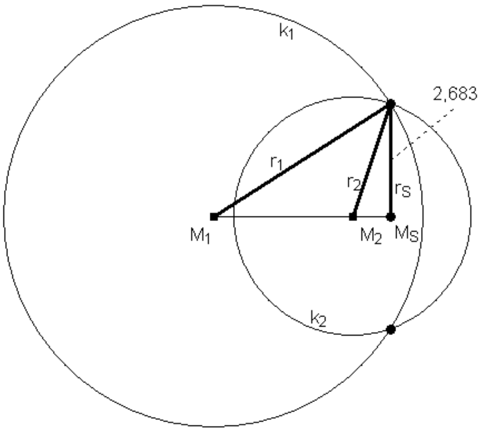
Die Ebenen ε , in der der Schnittkreis liegt, hat die Koordinatengleichung
ε: $-2x + 6y - 2z - 42 = 0$ bzw. $x - 3y + z + 21 = 0$

c) Sei r_s der Radius und M_s der Mittelpunkt des Schnittkreises. Es sei $d_1 := \left|\overrightarrow{M_1M_S}\right|$.

Für den Abstand d_1 des Mittelpunktes von der Ebene
ε: $x - 3y + z + 21 = 0$ gilt:

$d_1 = \left|\frac{(-3)\cdot 1+2\cdot(-3)+2\cdot 1+21}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}\right| = \frac{14}{\sqrt{11}} \approx 4{,}22$ LE

Da $d_1 > \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ folgt, dass die Lage der Kugeln sich wie rechts abgebildet darstellt.



Mit dem Satz des Pythagoras:
$r_s = \sqrt{5^2 - d_1^{\ 2}} = \sqrt{5^2 - (\frac{14}{\sqrt{11}})^2} = \sqrt{\frac{79}{11}} \approx 2{,}68$ LE

Mittelpunktbestimmung:
Sei g die Gerade, die durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 verläuft.

Dann gilt: g: $\vec{x} = \overrightarrow{m_1} + t\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Gerade g schneidet die Ebene ε im Punkt M_s, also gilt mit Koordinatenvergleich:
$x=-3-t$
$y=2+3t$
$z=2-t$
eingesetzt in die Koordinatengleichung von ε:
$(-3-t)-3(2+3t)+(2-t)+21=0$
$\Leftrightarrow -3-t-6-9t+2-t+21=0$
$\Leftrightarrow -7-11t+21=0$
$\Leftrightarrow t=\frac{14}{11}$

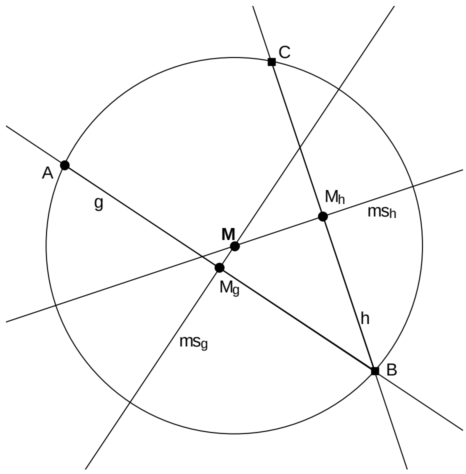
t eingesetzt in die Geradengleichung von g:

$$\vec{x} == \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{14}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{11} \\ \frac{64}{11} \\ \frac{8}{11} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow M_s(-\tfrac{47}{11} \mid \tfrac{64}{11} \mid \tfrac{8}{11})$$

Für den gesuchten Schnittkreis gilt:
Der Mittelpunkt ist $M_s(-\frac{47}{11} \mid \frac{64}{11} \mid \frac{8}{11})$ und der Radius beträgt $r_s=\sqrt{\frac{79}{11}}$ LE $\approx 2{,}68$ LE

Lösung zur Aufg. 2:

Wir stellen zuerst die Gerade g durch A und B und die Gerade h durch B und C auf. Dann bestimmen wir die Mittelpunkte M_g und M_h der Strecken AB bzw. BC und stellen dann die Geraden ms_g und ms_h auf, die den Mittelsenkrechten durch diese Mittelpunkte entsprechen. Der Schnittpunkt dieser Geraden ms_g und ms_h ist der Mittelpunkt des Kreises.
(Siehe auch Skizze rechts)



Aufstellen der Geradengleichungen zu g und h:

g: $\vec{x} = \vec{a} + t_g \cdot \overrightarrow{AB}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + t_h \cdot \overrightarrow{BC}$ $(t_g; t_h \in \mathbb{R})$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_g \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} + t_h \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Bestimmung der Mittelpunkte M_g und M_h:

$\overrightarrow{m_g} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_g\ (2|-2)$ $\quad$ $\overrightarrow{m_h} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_h\ (6|0)$

Aufstellen der Geraden ms_g und ms_h:

Zu der Geraden g ist der Vektor $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor auf g, zu der Geraden h ist der Vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor auf h. (Erinnerung: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ist NV auf $\vec{v}$)

ms_g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ und ms_h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t_g; t_h \in \mathbb{R})$

Schnittpunktbestimmung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Koordinatenvergleich:
I: $2+8 \cdot t_g = 6+12 \cdot t_h$
II: $-2+12 \cdot t_g = 4 \cdot t_h$
aus II folgt: $t_h = -\frac{1}{2} + 3 \cdot t_g$
t_h in I: $2+8 \cdot t_h = 6+12 \cdot (-\frac{1}{2} + 3 \cdot t_g) \quad \Leftrightarrow \quad t_g = \frac{1}{14}$

t_g in Gerade ms_g eingesetzt: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{14}\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{18}{7}\\-\frac{8}{7}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ M($\frac{18}{7}$ |– $\frac{8}{7}$)

(Kontrolle mit $t_h=-\frac{2}{7}$ in ms_h möglich)

Bestimmung von r:

$r=\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix}-\frac{46}{7}\\ \frac{22}{7}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{2600}{49}} = \frac{1}{7}\cdot\sqrt{2600} \approx 7{,}28$ LE (sinnvolle Kontrolle: $\left|\overrightarrow{BM}\right| = \frac{1}{7}\cdot\sqrt{38^2+34^2} \approx 7{,}28$ LE)

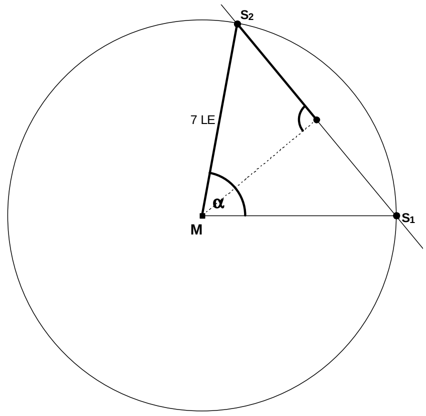
Der gesuchte Mittelpunkt lautet M($\frac{18}{7}$ |– $\frac{8}{7}$) und der Radius beträgt rd. 7,28 LE.

Lösung zur Aufg. 3:

Bestimmung der Schnittpunkte:
Aus dem Koordinatenvergleich von g folgt: $x=12-5\cdot t$ und $y=4+6\cdot t$ und weiter:
$((12-5\cdot t)-5)^2+((4+6\cdot t)-4)^2=49 \Leftrightarrow (7-5\cdot t)^2+(6t)^2=49 \Leftrightarrow 61\cdot t^2-70\cdot t=0 \Leftrightarrow t\cdot(61\cdot t-70)=0$
$\Rightarrow t_1=0$ und $t_2=\frac{70}{61}$ und somit $S_1(12|4)$ und $S_2(\frac{382}{61}|\frac{664}{61})$

Wir bestimmen die Länge der Sehne s:

Skizze:



$s=\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}-\frac{350}{61}\\ \frac{420}{61}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{350^2+402^2}{61^2}} = \frac{10}{61}\cdot\sqrt{2989} \approx 8{,}96$ LE

Wir berechnen zuerst den Flächeninhalt A_D des gleichschenkligen Dreiecks MS_1S_2 und danach den Flächeninhalt des Segmentes, der durch den Mittelpunktswinkel α gegeben ist.

Sei h die Höhe des Dreiecks dann, gilt:
$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2+h^2$ also
$h^2 = r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 49-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{61}\sqrt{2989}\right)^2 = 49-\frac{1225}{61} = \frac{1764}{61}$
$\Rightarrow h=\sqrt{\frac{1764}{61}} \approx 5{,}38$ LE

$A_D=\frac{1}{2}\cdot s\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{61}\cdot\sqrt{2989}\cdot\sqrt{\frac{1764}{61}} = \frac{5}{61}\sqrt{86436} = \frac{5}{61}\cdot 294 \approx 24{,}1$ FE

Wegen der Gleichschenkligkeit von MS_1S_2 gilt:
$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{1}{2}s}{r} = \frac{s}{2\cdot r}$ und umgestellt: $\frac{1}{2}\alpha = \arcsin(\frac{s}{2\cdot r})$
$\arcsin(\frac{s}{2\cdot r}) = \arcsin\left(\frac{\frac{10}{61}\sqrt{2989}}{2\cdot 7}\right) = \arcsin(\frac{5}{427}\sqrt{2989}) \approx 39{,}81° \Rightarrow \alpha \approx 79{,}62°$

Berechnung des Flächeninhalts A_k der Kreisscheibe: $A_k=\pi\cdot r^2 = \pi\cdot 49$
Berechnung des Flächeninhaltes A_S des von α bestimmten Kreissegmentes: $A_S=A_K\cdot\frac{79{,}62}{360} \approx 34{,}05$ FE.
Berechnung des Inhalts der ersten (kleineren) Teilfläche: $A_1=A_S-A_D \approx 49\cdot\pi\cdot\frac{79{,}62}{360} - \frac{5}{61}\cdot 294 \approx 9{,}95$ FE.
Berechnung des Inhalts der zweiten (größeren) Teilfläche: $A_2=A_K-A_1 \approx 49\cdot\pi - 9{,}95 \approx 143{,}99$ FE.

Die gesuchten Flächeninhalte betragen gerundet $A_1\approx 9{,}95$ FE und $A_2\approx 143{,}99$ FE.

Lösungen zur Aufg. 4:

a) Abstandsbestimmung von M zur Ebene ε.

I) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$=x–y=0 II) $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$=–2x+y+z=0

Sei x=1 gewählt. Dann ergibt sich:

I) 1–y=0 ⇒ y=1 y=1 und x=1 in II) –2+1+z=0 ⇒ z=1 ⇒ Der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist ein

Normalenvektor auf ε. $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ und somit ist $\overrightarrow{e_N}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ein Einheitsnormalenvektor auf ε.

Für den Abstand gilt: $d=|(\overrightarrow{x_0}-\vec{x})\circ\overrightarrow{e_N}|=\left|\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right|=|(-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}|=|\frac{-7}{\sqrt{3}}|\approx 4{,}04$ LE

Aus $d=|\frac{-7}{\sqrt{3}}|\neq 7$ folgt: Die Ebene tangiert die Kugel nicht. Da $d=|\frac{-7}{\sqrt{3}}|<7$ schneidet die Ebene die Kugel.

Bestimmung des Mittelpunktes M_s und des Radius r_s des Schnittkreises:

Es gilt: $r^2=d^2+r_s^2$, also $r_s^2=r^2-d^2=7^2-\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2=49-\frac{49}{3}=\frac{98}{3}$ ⇒ $r_s=\sqrt{\frac{98}{3}}\approx 5{,}72$ LE.

Sei g die Gerade, die durch M und M_s verläuft. Dann ist M(4|4|3) ein Aufpunkt dieser Geraden und

der Vektor $\overrightarrow{e_N}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g (da er orthogonal zu ε ist).

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $(t\in \mathbb{R})$

Für t=0 ergibt sich $\vec{m}$, für $t=-\frac{7}{\sqrt{3}}$ (siehe Abstandsberechnung) muss sich $\overrightarrow{m_s}$ ergeben.

$t=-\frac{7}{\sqrt{3}}$ ⇒ $\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}-\frac{7}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ ⇒ $M_s(\frac{5}{3}|\frac{5}{3}|\frac{2}{3})$

Der gesuchte Mittelpunkt lautet $M_s(\frac{5}{3}|\frac{5}{3}|\frac{2}{3})$ und der Radius $r_s=\sqrt{\frac{98}{3}}\approx 5{,}72$ LE.

b) Für den Mittelpunkt M_{k^*} von k* gilt: $\overrightarrow{m_{k^*}}=\vec{m}+2\cdot\overrightarrow{MM_s}=2\cdot\overrightarrow{m_s}-\vec{m}$

$\overrightarrow{m_{k^*}}=2\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ ⇒ $M_{k^*}(-\frac{2}{3}|-\frac{2}{3}|-\frac{5}{3})$

Gleichungen: $(x+\frac{2}{3})^2+(y+\frac{2}{3})^2+(z+\frac{5}{3})^2=7^2$ bzw. $\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\right]^2=7^2$

c) $P(6|1|z)$ mit $z \in \mathbb{R}_{>0}$

$(6-4)^2+(1-4)^2+(z-3)^2 = 49$
$\Leftrightarrow 2^2+(-3)^2+(z-3)^2=49$
$\Leftrightarrow 4+9+(z-3)^2=49$
$\Leftrightarrow (z-3)^2= 36$
$z_{1;2}=\pm\sqrt{36}+3 \Leftrightarrow z=9$ (da $z>0$) Der gesuchte Punkt lautet $P(6|1|9)$

d)
Die Koordinatengleichung für T ergibt sich wie folgt: $T: (x-4)(6-4)+(y-4)(1-4)+(z-3)(9-3)=49$
$\Leftrightarrow 2(x-4)-3(y-4)+6(z-3)=49 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-8-3y+12+6z-18=49 \quad \Leftrightarrow 2x-3y+6z-63=0$
Die Tangentialebene hat die Koordinatengleichung $2x-3y+6z-63=0$

Für T gilt: Der Abstand d des Mittelpunktes M zu T beträgt r=7 LE. Für alle Ebenen T_i, die zu T parallel sind und k schneiden, gilt folglich: Der Abstand von M zu T_i ist kleiner als 7 LE, also $d<7$. Außerdem gilt: Alle zu T parallelen Ebenen T_j haben die Gleichung $2x-3y+6z+C=0$ mit $C\in \mathbb{R}$.

$$d=\left|\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\left|\frac{2\cdot 4+(-3)\cdot 4+6\cdot 3+C}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}\right|=\left|\frac{14+C}{\sqrt{49}}\right|=\left|\frac{14+C}{7}\right|$$

Fallunterscheidung:
1. Fall: $C\geq 0 \Rightarrow \left|\frac{14+C}{7}\right|=2+\frac{1}{7}\cdot C$ und somit $2+\frac{1}{7}\cdot C < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{7}\cdot C < 5 \quad \Leftrightarrow 0 \leq C < 35$
2. Fall: $C<0 \Rightarrow \left|\frac{14+C}{7}\right| = \frac{1}{7}\cdot|14+C|$ und $\frac{1}{7}\cdot|14+C| < 7 \Leftrightarrow |14+C| < 49 \Leftrightarrow -63 < C < 0$

Alle zu T parallelen Ebenen T_i , die k schneiden, haben eine Koordinatengleichung der Form
$2x-3y+6z+C=0$ mit $C\in\,]-63;35[$.

Es gibt genau zwei Ebenen T_1 und T_2, die zu T parallel sind und in denen der Schnittkreis den Radius r= 2 LE aufweist.
Sei d_1 der Abstand von M zu T_1, dann gilt mit dem Satz des Pythagoras:
$r^2=2^2+d_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad 49=4+d_1^2 \quad \Rightarrow \quad d_1=\pm\sqrt{45}$, da $d_1\geq 0 \Rightarrow d_1=\sqrt{45}$

Fallunterscheidung:
1. Fall: $C>0$: $\left|\frac{14+C}{7}\right|=\sqrt{45} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{7}\cdot|14+C|=\sqrt{45} \quad \Leftrightarrow \quad 14+C = 7\cdot\sqrt{45} \quad \Leftrightarrow C = 7\cdot\sqrt{45}-14 \approx 32{,}96$
2. Fall: $C<0$: $\left|\frac{14+C}{7}\right|=\sqrt{45} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{7}\cdot|14+C|=\sqrt{45} \quad \Leftrightarrow \quad |14+C| = 7\cdot\sqrt{45} \quad \Leftrightarrow C= -7\cdot\sqrt{45}+14 \approx -60{,}96$
Achtung beim 2. Fall: C ist negativ!

Die gesuchten Koordinatengleichungen lauten (gerundet)
T_1: $2x-3y+6z+32{,}96=0$ und T_2: $2x-3y+6z-60{,}96=0$

Lösungen zur Aufg. 5:

a) Da der Richtungsvektor für alle $g\in g_k$ gleich ist, sind alle Geraden aus g_k zueinander parallel.
Sei $g\in g_k$. Dann gilt für den Koordinatenvergleich:
$x=-k^2+3r$
$y=2r$
$z=-1+2r$
Eingesetzt in die Koordinatengleichung von ε: $3(\cdot 2r)-3\cdot(-1+2r)-3 = 6r +3-6r-3 = 0 \Rightarrow g\in g_k$.

b) Da alle Geraden aus g_k zueinander parallel sind, schneidet h alle Geraden oder genau eine Gerade oder keine Gerade.

Sei $g \in g_k$

Dann folgt mit dem Koordinatenvergleich:

I) $-k^2+3r = 2$

II) $2r = 1-s$

III) $-1+2r = 2-2s$

II) in III) $-1+(1-s)=2-2s \Leftrightarrow -s=2-2s \Leftrightarrow s=-\frac{2}{3}$

s in II) $2r=1-(-\frac{2}{3}) \Leftrightarrow r=\frac{5}{6}$

r in I) $-k^2+3(\frac{5}{6}) = 2 \Leftrightarrow -k^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}$

$s=-\frac{2}{3}$ in h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow S(2|\frac{5}{3}|\frac{2}{3})$

Die Gerade $g_{\frac{1}{2}}: \vec{x}=\begin{pmatrix}-(\frac{1}{2})^2\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ schneidet die Gerade h im Schnittpunkt $S(2|\frac{5}{3}|\frac{2}{3})$.

c) Der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor auf ε mit $|\vec{n}| = \sqrt{18}$

Der Vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor von h mit $|\vec{u}|=\sqrt{5}$

Es gilt: $\cos(\alpha)\cdot|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|= \vec{n}\circ\vec{u}$

$\Rightarrow \cos(\alpha)\cdot\sqrt{5}\,\sqrt{18} = 3\cdot(-1)+(-3)\cdot 2=-9 \Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{-9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arccos(\frac{-9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}}) \approx 161{,}57°$

161,57° – 90° = 71,57° Der gesuchte Winkel beträgt rd . 71,57°.

d)

Sei $M_i(a|b|c)$ M_1 oder M_2 $(a;b;c\in IR)$

Da $M_i \in h$, gilt:

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ (für s_1 bzw s_2 aus IR)

Mit dem Koordinatenvergleich folgt:

a=2;

I) $b=1-s$

II) $c=2+2\cdot s$

Da der Abstand von M_i zu ε $5\cdot\sqrt{2}$ beträgt, gilt mit der Abstandgleichung:

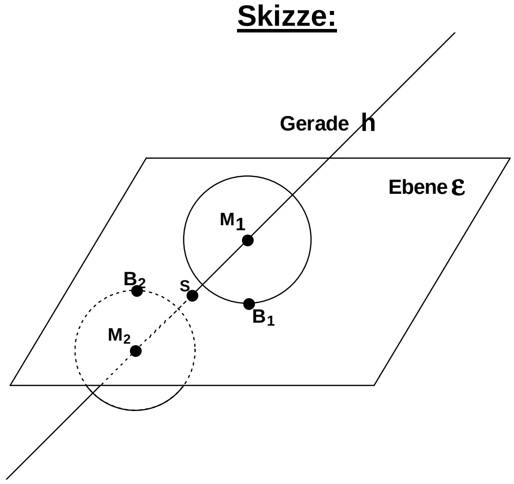
$\left|\frac{0\cdot 2+3\cdot b-3\cdot c-3}{\sqrt{0^2+3^2+(-3)^2}}\right|=5\cdot\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{3\cdot b-3\cdot c-3}{\sqrt{18}}\right|=5\cdot\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |3b-3c-3| = 5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{18} = 5\cdot\sqrt{36} = 5\cdot 6 = 30$

also III) $|3b-3c-3| = 30$

Skizze:



I) und II) in III):

$|3\cdot(1-s)-3\cdot(2+2\cdot s)-3| = 30$

$\Leftrightarrow |3-3\cdot s-6-6\cdot s-3| = 30$

$\Leftrightarrow |-6-9\cdot s| = 30$

Es gilt: $s\neq 0$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $s<0 \Rightarrow s_1 = -4$

2. Fall: $s>0 \Rightarrow s_2 = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

s_i in die Geradengleichung von h eingesetzt:

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + (-4)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow M_1(2|5|-6)$$

$$\vec{m}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + (\tfrac{8}{3})\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{3}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow M_2(2|-\tfrac{5}{3}|\tfrac{22}{3})$$

Die gesuchten Mittelpunkte lauten $M_1(2|5|-6)$ und $M_2(2|-\frac{5}{3}|\frac{22}{3})$.

e) $$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{3}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{20}{3}\\\frac{40}{3}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{0^2+(\tfrac{20}{3})^2+(\tfrac{40}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{2000}{9}} = \tfrac{20}{3}\sqrt{5}$$

Es gilt: $|\overrightarrow{M_1M_2}| > r_1+r_2 = 2\cdot r \Rightarrow$ Die Kugeln schneiden und berühren sich nicht.

Somit gilt für den minimalen Abstand d der Kugeln $|\overrightarrow{M_1M_2}| = r_1+r_2+d \Rightarrow d=\frac{20}{3}\sqrt{5}-10\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}76$ LE

Der Kugeln schneiden sich nicht und haben einen kleinsten Abstand von rd. 0,76 LE zueinander.

f) $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor auf ε (siehe Aufgabenteil c). Dann ist $\overrightarrow{e_N} = \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{\sqrt{18}}\\\frac{-3}{\sqrt{18}}\end{pmatrix}$ ein

Einheitsnormalenvektor auf ε. Somit ist $\overrightarrow{e_N}$ auch ein Einheitsnormalenvektor auf ε*.

Gesucht: Aufpunkt P^* auf ε*. Der Punkt P(0|1|0) liegt auf ε, da seine Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen. $3\cdot 1-3\cdot 0-3=0$. P* sei der an M_1 gespielte Punkt von P.

Dann gilt: $\vec{p^*} = \vec{p_1} + 2\cdot\overrightarrow{PM_1}$ mit $\overrightarrow{PM_1} = \begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{p^*} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\\-12\end{pmatrix}$

Wir verwenden P* als Aufpunkt von ε*.

HNF von ε*:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\9\\-12\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{\sqrt{18}}\\\frac{-3}{\sqrt{18}}\end{pmatrix} = 0$$

Sei X(x|y|z) ein Punkt von ε* (x;y;z∈IR). Dann gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}\right] \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{-3}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (x-4)\cdot 0+(y-9)\cdot \frac{3}{\sqrt{18}} +(z+12)\cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{18}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3y}{\sqrt{18}} - \frac{27}{\sqrt{18}} - \frac{3z}{\sqrt{18}} - \frac{36}{\sqrt{18}} = 0$

$\Leftrightarrow 3y - 27 - 3z - 36 = 0$

$\Leftrightarrow 3y - 3z - 63 = 0$

Eine gesuchte HNF von ε* ist $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{-3}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = 0$ und eine Koordinatengleichung von ε* ist

$3y - 3z - 63 = 0$ (bzw. $y-z-21=0$).

Hinweis: Bei der HNF sind auch andere Aufpunkte möglich (eben alle Punkte von ε*) und der Einheitsnormalenvektor kann zu $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ vereinfacht werden.

g) Kugel k_1: $M_1(2|5|-6)$ und $r=5\cdot\sqrt{2}$ bzw $r^2 = 50$

Kugelgleichung: $(x-2)^2+(y-5)^2+(z+6)^2 = 50$

A(–1|0|–2): $(-1-2)^2+(0-5)^2+(-2+6)^2 = (-3)^2+(-5)^2+4^2 = 9+25+16 = 50 \Rightarrow A\in k_1$
C(–1|1|–1): $(-1-2)^2+(1-5)^2+(-1+6)^2 = (-3)^2+(-4)^2+5^2 = 9+16+25 = 50 \Rightarrow C\in k_1$

Für den Punkt B gilt, dass er als Spiegelpunkt von A an M_1 angesehen werden kann, also gilt :

$\vec{b} = \vec{a} + 2\cdot\overrightarrow{AM_1}$, wobei $\overrightarrow{AM_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

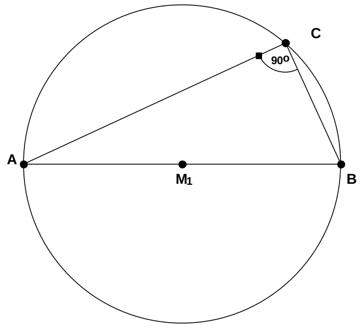
$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow B(5|10|-10)$

Der gesuchte Punkt B lautet B(5|10|–10).

h)

Die Punkte A, B und C liegen auf k_1, des weiteren können die Punkte A und B als am Mittelpunkt M_1 aufeinander gespiegelte Punkte angesehen werden. Somit erfüllen A; B; C den Satz des Thales, das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei C. Siehe Skizze

Skizze:



Für den Flächeninhalt von ABC gilt somit: $A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ und somit $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{198}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$.

Es folgt: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{198} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}\ 6 \cdot \sqrt{11} = 3 \cdot \sqrt{11}$

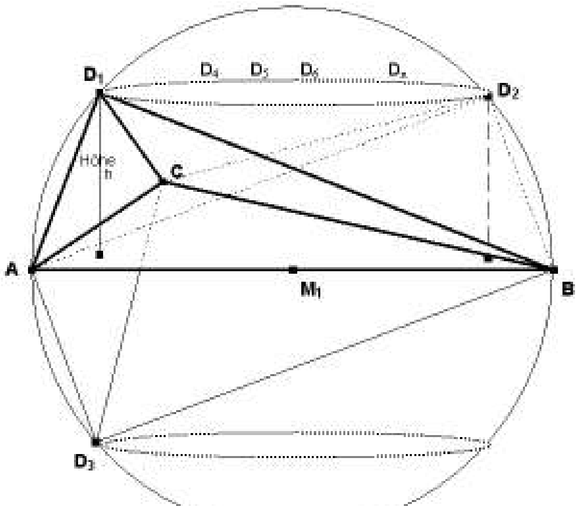
Für das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h gilt: $A_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$A_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{11} \cdot h = \sqrt{11} \cdot h$

Da für die Pyramiden $ABCD_i$ gelten soll $A_{Pyramide}$=11 VE folgt, $11 = \sqrt{11} \cdot h \Rightarrow h = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ LE

Die Höhe der Pyramiden $ABCD_i$ mit einem Volumen von 11 VE beträgt $\sqrt{11}$ LE.

Da die Grundfläche ABC festgelegt ist und die Höhe einer jeden Pyramide $ABCD_i$ gleich sein muss (damit V=11 VE), müssen alle Punkte D_i in zwei Ebenen liegen, die parallel zur Ebene, in der ABC liegt, nach oben bzw. nach unten angeordnet sind.
Somit liegen alle Punkte D_i auf zwei Kreisen k_{D1} und k_{D2}, wie in der Skizze rechts erkennbar.
Die Mittelpunkte der Kreise k_D sind um den Faktor $h = \sqrt{11}$ von M_1 orthogonal zur Ebene, die von ABC aufgespannt wird, nach oben bzw. unten verschoben.



Für den Radius r_D gilt:

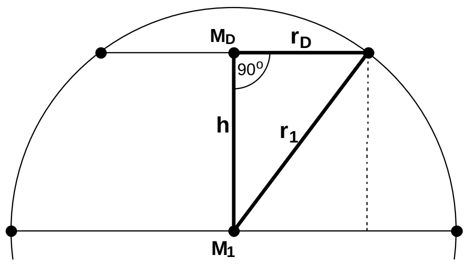
$r_1^2 = h^2 + r_D^2$

$\Leftrightarrow \left(5 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{11}\right)^2 + r_D^2$

$\Leftrightarrow 50 = 11 + r_D^2$

$\Rightarrow r_D = \sqrt{39}$ LE

Skizze Radius r_D



Sei μ die von ABC aufgespannte Ebene. Dann sind A;B;C∈μ und $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ (r;s∈IR) ist eine Ebenengleichung von μ.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6x+10y-8z=0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y+z=0$

Sei y=1, dann ist z=–1 und aus 6x+10·1–8·(–1)=0 folgt 6x=18 und x=3

Somit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor und $\overrightarrow{e_{N\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$ ein Einheitsnormalenvektor auf μ.

Für den Mittelpunkt M_{D1} von k_{D1} gilt dann die Gleichung: $\overrightarrow{m_{D1}} = \overrightarrow{m_1} + h \cdot \overrightarrow{e_{N\mu}}$ (wobei M1 der Mittelpunkt der Kugel k_1 ist und h die Höhe der Pyramiden).

$$\overrightarrow{m_{D1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \sqrt{11} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{D1}(5|6|-7)$$

$$\overrightarrow{m_{D2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \sqrt{11} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{D2}(-1|4|-5)$$

Die gesuchte Höhe der Pyramiden beträgt $h=\sqrt{11}$ LE; die Mittelpunkte der gesuchten Kreise lauten $M_{D1}(5|6|-7)$ bzw. $M_{D2}(-1|4|-5)$ und beide haben den Kreisradius $r_D = \sqrt{39}$ LE.