Lösungen: Skalarprodukt

Aufg. 1:

a) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ b) $\vec{a} \circ \vec{b} = -10$ c) $\vec{a} \circ \vec{b} = -1$ d) $\vec{a} \circ \vec{b} = 15$

Aufg. 2:

Die entsprechenden Winkelweiten sind: a) α=90° b) α≈80° c) α≈72°

Aufg 3:

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)=42 \Rightarrow \sqrt{21} \cdot 2 \cdot \sqrt{21} \cdot \cos(\alpha)=42 \Rightarrow \cos(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha=0°$

Überlegung: Es gilt $\vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$, die Vektoren sind also parallel und gleich orientiert. Somit muss der Winkel zwischen ihnen Null Winkelgrad betragen.

b) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ $|\vec{b}| = 2 \cdot \sqrt{14}$ $\vec{a} \circ \vec{b} = 3\cdot(-6)+(-1)\cdot 2+2\cdot(-4) = -28$

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = -28 \Rightarrow \sqrt{14} \cdot 2 \cdot \sqrt{14} \cdot \cos(\alpha) = -28 \Rightarrow \cos(\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha=180°$

Überlegung: Es gilt $\vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$, die Vektoren sind also parallel aber gegensätzlich orientiert. Somit muss der Winkel zwischen ihnen 180° betragen.

Aufg. 4:

Der Winkel zwischen den Ortsvektoren von A und B beträgt ca. 70,9° und der Winkel zwischen den Ortsvektoren von X und Y ca. 104,5°.

Aufg. 5:

Die Innenwinkel betragen: α=39°, β=32°, γ=109°

Aufg. 6:

a) $\vec{e_n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ oder $\vec{e_n} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ b) $\vec{e_n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} \\ \frac{12}{17} \\ \frac{12}{17} \end{pmatrix}$ oder $\vec{e_n} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{12}{17} \\ -\frac{12}{17} \end{pmatrix}$

Aufg. 7:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ rechter Winkel bei A, also ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck.

Aufg. 8:

Gesucht sind also Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (x,y,z∈IR), die die Bedingungen $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$ erfüllen.

Es ergeben sich also die beiden Gleichungen
I) 3x–2y+4z=0 und II) 2x+2y+z=0. Wir addieren I)+II) und erhalten: 5x+5z=0
Wählen wir x=1, s ergibt sich z=–1 und x,z in II) ergibt y=–0,5.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ ist also einer der gesuchten Vektoren. Da alle anderen gesuchten Vektoren parallel zu $\vec{n}$ sei müssen, gilt:

Alle Vektoren, die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal sind, haben die Form $r \cdot \vec{n} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ mit r∈IR\{0}. Es sind also die reellen Vielfachen des Vektors $\vec{n}$ (außer dem Nullvektor).

Aufg. 9:

a) x–y+z–5=0 b) 3x+2y+z+1=0 (є: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$)

Aufg. 10:

Vorgehen: Ebene in Normalenform darstellen ⇒ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist NV auf die Ebene є. (Idee: Ist ax+by+cz+d=0 die Koordinatengleichung, so ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein NV auf є).

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor der Geraden. Es gilt: $\vec{v} \circ \vec{n}$ =–9–4+8=–5 ≠ 0, also sind $\vec{v}$ und $\vec{n}$ nicht zueinander senkrecht. Somit schneidet die Gerade g die Ebene є nicht senkrecht.

Aufg. 11:

Die gesuchte Ebenengleichung in Koordinatenform lautet є: 2x–6y+3z–23=0. Da $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^3} = \sqrt{49} = 7 \neq 1$, handelt es sich bei $\vec{n}$ nicht um einen Einheitsnormalenvektor.

Hessesche Normalenform: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$=0

Aufg. 12:

Die Länge einer Raumdiagonalen des Würfels beträgt 2 LE, da alle Eckpunkte auf der Kugel liegen und alle Kanten gleich lang sind.
Im Unterricht haben wir hergeleitet: Ist die Kantenlänge eines Würfels 1 LE, so ist die Raumdiagonale $\sqrt{3}$ LE lang. (Kann man sich auch schnell mit dem zweimaligen Anwenden des Satzes von Pythagoras herleiten).

Also: Beträgt die Raumdiagonale $\sqrt{3}$ LE, so beträgt die Kantenlänge 1 LE.

Folgerung: Beträgt die Raumdiagonale 1 LE, so beträgt die Kantenlänge $\frac{1}{\sqrt{3}}$ LE

und weiter: Beträgt die Raumdiagonale 2 LE, so beträgt die Kantenlänge $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ LE (= $\frac{2}{3}\sqrt{3}$)

Die Kantenlänge des in die Kugel einbeschriebenen Würfels beträgt $\frac{2}{\sqrt{3}}$ LE oder ca. 1,15 LE.