Lösungen zur Kurvenuntersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion mit Aufgabenerweiterungen

Aufgabe a)

Nullstellen der Nennerfunktion: $(1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Symmetrie: $f(-x)=\frac{8(-x)-16}{(1-(-x))^3} = \frac{-8x-16}{(1+x)^3} \neq f(x)$ $\qquad f(-x) = \frac{-8x-16}{(1+x)^3} \neq -f(x)$

f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch.

Aufgabe b)

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0)= \frac{8\cdot 0-16}{(1-0)^3} = -16$ Schnittpunkt mit der y-Achse: **Y(0|-16)**

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{8x-16}{(1-x)^3}=0 \Leftrightarrow 8x-16=0 \Leftrightarrow 8x=16 \Leftrightarrow x=2$ Schnittpunkt mit der x-Achse: **N(2|0)**

Aufgabe c)

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches: $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ $\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei y=0, also ist die x-Achse Asymptote des Graphen

Verhalten am Rand der Definitionslücke $x_D=1$:

$f(x)\xrightarrow[x\to 1]{}+\infty$ rechtsseitig und $f(x)\xrightarrow[x\to 1]{}-\infty$ linksseitig

senkrechte Polasymptote bei $x_D=1$

Aufgabe d)

$f`(x)=\frac{8(1-x)^3-(8x-16)\cdot 3(-1)\cdot(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{(1-x)^2[8(1-x)+3\cdot(8x-16)]}{(1-x)^6} = \frac{8(1-x)+3\cdot(8x-16)}{(1-x)^4} = \frac{8-8x+24x-48}{(1-x)^4} = \frac{16x-40}{(1-x)^4}=g(x)$

$f``(x)= \frac{16(1-x)^4-(16x-40)\cdot 4(-1)(1-x)^3}{(1-x)^8} = \frac{(1-x)^3[16(1-x)+4(16x-40)]}{(1-x)^8} = \frac{16(1-x)+4(16x-40)}{(1-x)^5} = \frac{16-16x+64x-160}{(1-x)^5} = \frac{48x-144}{(1-x)^5} =$

$\frac{48(x-3)}{(1-x)^5}=h(x)$

Aufgabe e)

Bestimmung möglicher Extrema/Wendestellen

$f`(x)=0 \Leftrightarrow 0=\frac{16x-40}{(1-x)^4} \Leftrightarrow 0=16x-40 \Leftrightarrow 16x=40 \Leftrightarrow x=2,5$ mögliche Extremstelle $x_E=2,5$

$f``(2,5)= \frac{48(2,5-3)}{(1-2,5)^5} = \frac{-24}{-1,5^5} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x_E=2,5$

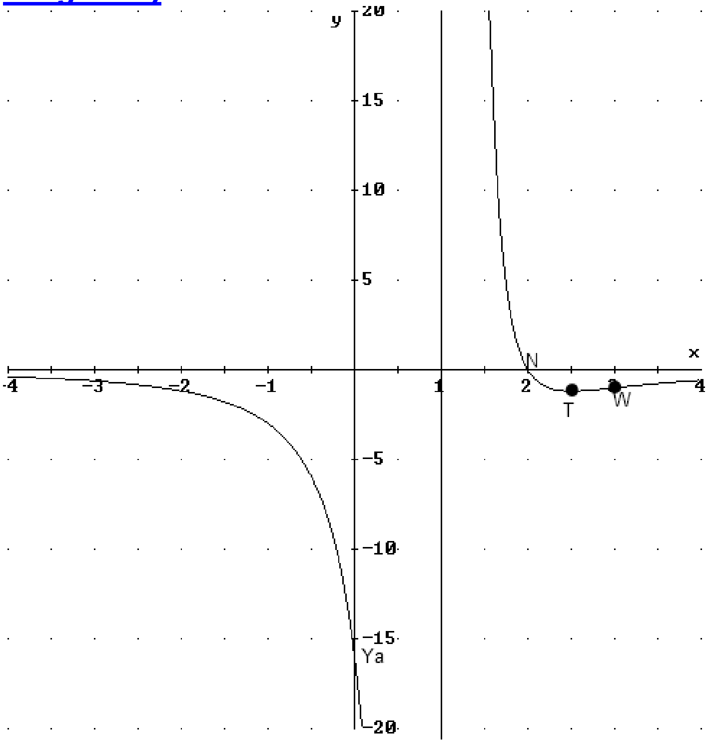
$f(2,5)= \frac{8\cdot 2,5-16}{(1-2,5)^3} \approx -1,2 \Rightarrow$ **T(2,5|-1,2)**

$f``(x)=0 \Leftrightarrow \frac{48(x-3)}{(1-x)^5}=0 \Leftrightarrow 48(x-3)=0 \Leftrightarrow x=3$ mögliche Wendestelle $x_W=3$

$f```(3)=\frac{96(2\cdot 3-7)}{(1-3)^6} = -1,5 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_W=3$

$f(3)= \frac{8\cdot 3-16}{(1-3)^3} = -1 \Rightarrow$ **W(3|-1)**

Aufgabe f)



Aufgabe g)

Sei $F(x)=\frac{8x-12}{(1-x)^2}$. Zu zeigen ist: F`=f

$$F`(x)= \frac{8\cdot(1-x)^2-(8x-12)\cdot 2\cdot(-1)\cdot(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)\ [8\cdot(1-x)+2(8x-12)]}{(1-x)^4} = \frac{8-8x+16x-24}{(1-x)^3} = \frac{8x-16}{(1-x)^3} = f(x)$$

Somit ist F eine Stammfunktion von f und die Gleichung bewiesen.

Aufgabe h)

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = F(-2)-F(-1)= \frac{8\cdot(-2)-12}{(1-(-2))^2} - \frac{8\cdot(-1)-12}{(1-(-1))^2} = \frac{-28}{3^2} - \frac{-20}{2^2} = -\frac{17}{9}$$

Aufgabe i)

$$A_{[4,6]}= \left|\int_4^6 f(x)dx\right| = |F(6)-F(4)| \approx 0{,}78 \text{ FE}$$

Aufgabe j)

Nullstelle $x_N=2\in[1{,}5;3]$

$$A_{[1,5;3]} = A_{[1,5;2]} + A_{[2;3]} = \int_{1,5}^{2} f(x)dx + \left|\int_2^3 f(x)dx\right| = 4 + |-1| = 5 \text{ FE}$$

Aufgabe k)

Sei $b\in IR_{>2}$. $\left|\int_2^b f(x)dx\right| = |F(b)-F(2)| = \left|\frac{8\cdot b-12}{(1-b)^2} - \frac{8\cdot 2-12}{(1-2)^2}\right| = \left|\frac{8\cdot b-12}{(1-b)^2} -4\right| = \left|\frac{8\cdot b-12}{1-2b+b^2} -4\right| = \left|\frac{b^2(\frac{8}{b^1}-\frac{12}{b^2})}{b^2(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b^1}+1)} -4\right| =$

$\left|\frac{(\frac{8}{b^1}-\frac{12}{b^2})}{(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b^1}+1)} -4\right| \xrightarrow[b\to+\infty]{} \left|\frac{0+0}{0+0+1} -4\right| = |0-4| = 4$ FE (Ein Nachweis mit Hilfe der schrittweisen Näherung durch mit dem Taschenrechner bestimmter Werte hätte auch genügt.)

Aufgabe l)

Sei b$\in$ IR$_{<0}$. $\left|\int_b^0 f(x)dx\right|$ = |F(0)-F(b)| = | $\frac{8\cdot 0-12}{(1-0)^2}$ - $\frac{8\cdot b-12}{(1-b)^2}$ | = |-12- $\frac{8\cdot b-12}{(1-b)^2}$ | = |-12- $\frac{8\cdot b-12}{1-2b+b^2}$ | =|-12- $\frac{b^2(\frac{8}{b^1}-\frac{12}{b^2})}{b^2(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b^1}+1)}$ |= |-12- $\frac{(\frac{8}{b^1}-\frac{12}{b^2})}{(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b^1}+1)}$ | $\xrightarrow[b\to-\infty]{}$ |-12- $\frac{0+0}{0+0+1}$ | = |-12-0| = 12 FE (Ein Nachweis mit Hilfe der schrittweisen Näherung durch mit dem Taschenrechner bestimmter Werte hätte auch genügt.)

Aufgabe m)

Gesucht: y=mx+n mit m,n$\in$ IR W(3|-1)

f \`(3) = $\frac{16\cdot 3-40}{(1-3)^4}$ = $\frac{8}{2^4}$ = $\frac{1}{2}$ ⇨ y= $\frac{1}{2}$ x+n -1 = $\frac{1}{2}$ ·3+n ⇨ n= - $\frac{5}{2}$

Die gesuchte Gleichung der Wendetangente lautet y= $\frac{1}{2}$ x- $\frac{5}{2}$