Lösung der Kurvenuntersuchung zu f mit $f(x)= x^2 \cdot e^x$

Schnittpunkte mit den Achsen:

Nullstellen:

$0=x^2 \cdot e^x \Leftrightarrow x^2 = 0$ oder $e^x = 0$

$e^x \neq 0$ für alle $x \in D_f$

$x^2=0$ wenn $x=0$, also doppelte Nullstelle bei $x=0$, Somit Berührpunkt des Graphen mit der x-Achse bei N(0|0)

y-Achsenabschnitt: $f(0)=0^2 \cdot e^0=0$ also y-Achsenabschnitt $y=0$, Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse bei N(0|0).

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \Rightarrow$ x-Achse ist (waagerechte) Asymptote für $x \rightarrow -\infty$

(Überprüfung durch entsprechende x-Werte genügt)

Symmetrie:

Achsensymmetrie? $f(-x)=(-x)^2 \cdot e^{-x}=x^2 \cdot \frac{1}{e^x} \neq f(x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung? $f(-x)= (-x)^2 \cdot e^{-x}=x^2 \cdot \frac{1}{e^x} \neq -x^2 \cdot e^x=-f(x)$

Der Graph ist somit weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Extrema:

$f`(x)= e^x \cdot x^2+2 \cdot x \cdot e^x = e^x(x^2+2x)$

$f``(x)= e^x \cdot x^2+e^x \cdot 4x+2 \cdot e^x = e^x(x^2+4x+2)$

$0=e^x \cdot (x^2+2x) \Leftrightarrow x^2+2x = 0$ oder $e^x = 0$

$0=x^2+2x = x(x+2) \Rightarrow x=0$ oder $x= -2$

mögliche Extremstellen bei $x=0$ oder $x=-2$

$f``(0)=e^0(0^2+4 \cdot 0+2)=1 \cdot 2>0 \Rightarrow$ Tiefpunkt T(0|0)

$f``(-2)=e^{-2}((-2)^2+4 \cdot (-2)+2) = e^{-2} \cdot (-2)= -2 \cdot \frac{1}{e^2}<0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-2|\frac{4}{e^2}) \approx (-2|0{,}54)$

Wendepunkte:

$f``(x)= e^x \cdot x^2+e^x \cdot 4x+2 \cdot e^x = e^x(x^2+4x+2)$

$f```(x)= e^x \cdot x^2+e^x \cdot 6x+6 \cdot e^x = e^x(x^2+6x+6)$

$0=e^x(x^2+4x+2) \Leftrightarrow e^x=0$ oder $x^2+4x+2=0$

$x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}-2$ oder $x=-\sqrt{2}-2$

mögliche Wendestellen bei x= $x=\sqrt{2}-2$ oder $x=-\sqrt{2}-2$

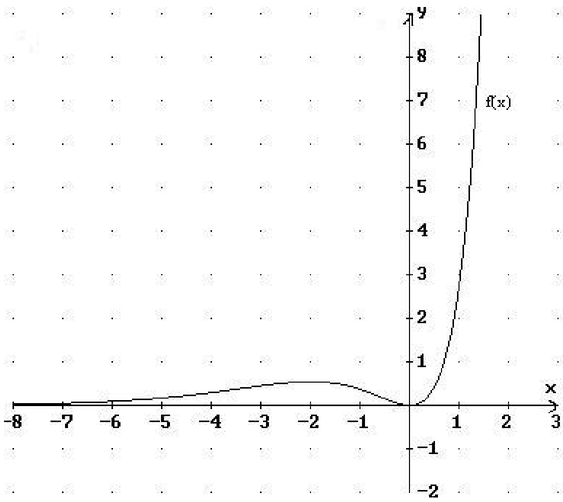
$f```(\sqrt{2}-2) \approx 1{,}57 \neq 0$

$f```(-\sqrt{2}-2) \approx -0{,}09 \neq 0$

Wendestellen bei $W_1 \approx (\sqrt{2}-2|0{,}2)$ und $W_2 \approx (-\sqrt{2}-2|0{,}4)$

Graph der Funktion:

x	-4	-2	-1	0	1	2
≈f(x)	0,29	0,54	0,37	0	2,18	29,56



Aufg. d):
Behauptung: F ist Stammfunktion von f
z.z: $F'(x)=f(x)$ für alle $x\in D_f$ (eigentlich auch noch $D_F=D_f$, ist aber klar)

$F'(x)=e^x\cdot(x^2-2x+2) + e^x\cdot(2x-2)$ [Produktregel]

$= x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2\cdot e^x + 2x\cdot e^x - 2\cdot e^x$
$= x^2\cdot e^x = f(x)$

Aufg. e)
I) $F(x)= e^x\cdot(x^2-2x+2)$ ist eine Stammfunktion von f (laut Aufg. d)

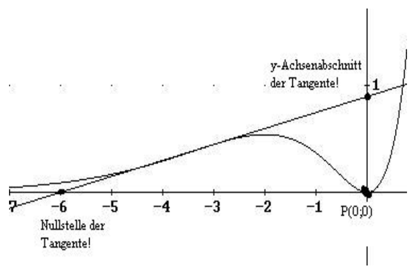
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1)-F(-1) = e^1(1^2-2\cdot1+2) - e^{-1}((-1)^2-2\cdot(-1)+2) = e-5\cdot e^{-1}=e-\frac{5}{e}\approx0{,}88$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt gerundet 0,88 FE.
II) Es liegt ein uneigentliches Integral vor.
Sei $b\in\mathbb{R}$.

$\int_{b}^{0} f(x)dx = F(0)-F(b) = e^0(0^2+2\cdot0+2) - e^b(b^2+2b+2) = 2 - b^2\cdot e^b-2b\cdot e^b-2\cdot e^b \xrightarrow[b\to-\infty]{} 2$

(da der Term $b^2\cdot e^b-2b\cdot e^b-2\cdot e^b$ lt. Vorgabe gegen Null strebt für $b\to-\infty$)
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 2 FE.

III)
Bestimmung des Berührpunktes $T(-3|f(-3))$.
$f(-3) = (-3)^2\cdot e^{-3} = \frac{9}{e^3}$ also $T(-3|\frac{9}{e^3})$



gesucht:
Geradengleichung der Tangente der Form $y=m\cdot x+n$ mit $m,n\in\mathbb{R}$
Die Steigung m ergibt sich aus der 1. Ableitung von f an der Stelle $x=-3$.
$f'(-3)=e^{-3}((-3)^2+2\cdot(-3)) = e^{-3}\cdot3 = \frac{3}{e^3}$, also $m=\frac{3}{e^3}$
Der Punkt T liegt auf g, Koordinaten erfüllen also die Gleichung $y=\frac{3}{e^3}\cdot x+n$

$\frac{9}{e^3} = \frac{3}{e^3}\cdot(-3) + n \Rightarrow n=\frac{9}{e^3}+\frac{9}{e^3}=\frac{18}{e^3}$. gesuchte Geradengleichung lautet: $y=\frac{3}{e^3}\cdot x+\frac{18}{e^3}$

Die Tangente und die beiden Achsen bilden ein Dreieck mit den Punkten
A(0|0)
$B(0|\frac{18}{e^3})$ [y-Achsenabschnitt des Graphen von g!]
C(6|0) [x=6 ist die Nullstelle der Tangentengleichung!]
Flächeninhalt: $A=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{18}{e^3}=\frac{54}{e^3}\approx$ 2,69 FE, Der gesuchte Flächeninhalt beträgt rd. 2,69 FE.